m.in. dzięki Galileuszowi, który używał liczb ujemnych do zaznaczania wektorów o przeciwnych znakach.

Liczby całkowite – szkolne początki

Opiszę swoje doświadczenie związane z liczbami ujemnymi: w czasie lekcji (klasa IV) o odejmowaniu ułamków zwykłych zaproponowałem klasie „odliczankę". Wystartowaliśmy z liczbą 5, od której należało odjąć $2/3$, następnie od otrzymanego wyniku też odejmowano $2/3$ itd. Na kolejnym etapie pojawiła się liczba $1-2/3=1/3$, a następnie $1/3-2/3$... i tutaj, ku mojemu zaskoczeniu, uczeń podał bezbłędną odpowiedź $-1/3$, kolejny uczeń bez wahania powiedział –1. Liczby całkowite pojawiają się w V, VI klasie, ale jak widać już w IV klasie dzieci nie mają z nimi kłopotu. Oczywiście liczby ujemne dla uczniów nie są zupełną nowością, znają je na przykład z prognoz pogody, widzą termometry z ujemnymi temperaturami, zauważają, że niekiedy w windach piętra pod ziemią oznaczone są liczbami ujemnymi. Ważnym narzędziem przy wprowadzaniu liczb całkowitych jest oś liczbowa, a poprzez analogię do termometru warto, aby na początku uczniowie rysowali także pionowe osie liczbowe. Pamiętajmy o kilku bardzo dobrych modelach liczb całkowitych:

- zapisywanie liczb ujemnych i liczb dodatnich (przynajmniej na początku) z małymi znaczkami: $^{-}3$, $^{+}3$, lub używanie nawiasów;
- kojarzenie liczb dodatnich z zyskiem, ujemnych z długiem;
- wektorowa reprezentacja: plus jeden to →, minus jeden to ←, a zatem na przykład –4 to ←←←←.

W [MPM] można znaleźć skany fragmentów podręczników z wprowadzeniem liczb ujemnych.

Liczby całkowite – matematyczna definicja

Liczby całkowite „otrzymuje się" z liczb naturalnych, wprowadzając w $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ relację równoważności:

$$(m,n)\sim(c,d)\Leftrightarrow m+d=c+n.$$

Klasy abstrakcji to liczby całkowite. Spójrzmy na przykład na klasę abstrakcji elementu (1,2), którą oznaczamy jako –1: $[(1,2)]=\{(0,1),(1,2),(2,3),\ldots\}$. Więcej informacji na ten temat czytelnik znajdzie w [MPM]; korzystając z powyższej definicji, definiuje się dodawanie i mnożenie liczb całkowitych.

Działania na liczbach całkowitych

Dodawanie liczb całkowitych w szkole jest podzielone na dwa etapy:

- dodawanie liczby dodatniej i liczby ujemnej,
- dodawanie dwóch liczb ujemnych.

Można tutaj zastosować model z zyskiem i długiem. Warto też skomentować dodanie zera do liczby całkowitej – zapytajmy uczniów o uzasadnienie, że dodanie zera nie zmienia wyniku.

Odejmowanie liczb całkowitych też warto podzielić na etapy:

- odejmowanie liczby dodatniej,
- odejmowanie liczby ujemnej.

Do wyjaśnienia reguł odejmowania można skorzystać z osi liczbowej; w przypadku odejmowania liczby dodatniej to racjonalne, bo na przykład $(-2)-4$ oznacza liczbę mniejszą od (-2) o 4, więc przesunięcie z punktu (-2) o 4 w lewo jest zrozumiałe. Nieco trudniej wyjaśnić, dlaczego w działaniu $(-2)-(-4)$ przesuwamy się po osi o 4 jednostki w prawo. Dlaczego w prawo? Można argumentować tak: skoro odjęcie (-4) przesunie nas do pewnego punktu, to odjęcie 4 spowoduje, że wrócimy do wyjściowego punktu (-2), a zatem $(-2)-(-4)=2.$ Patrząc na oba rozpatrzone przypadki odejmowania, konstatujemy, że ***zamiast odejmować liczbę, możemy dodawać liczbę do niej przeciwną***. Na zakończenie warto jeszcze zapytać o odejmowanie liczby 0.

Przyjrzyjmy się na koniec tego podrozdziału problemowi mnożenia liczb całkowitych. Rozpatruje się dwa przypadki:

- mnożenie liczby całkowitej dodatniej przez liczbę ujemną,
- mnożenie dwóch liczb ujemnych.

Pierwszy przypadek jest łatwy, skorzystamy z faktu, że mnożenie przez liczbę naturalną możemy zastąpić dodawaniem tych samych składników, na przykład $3\cdot(-2)=(-2)+(-2)+(-2)=-6$.